



# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

IDROSTATICA - 2

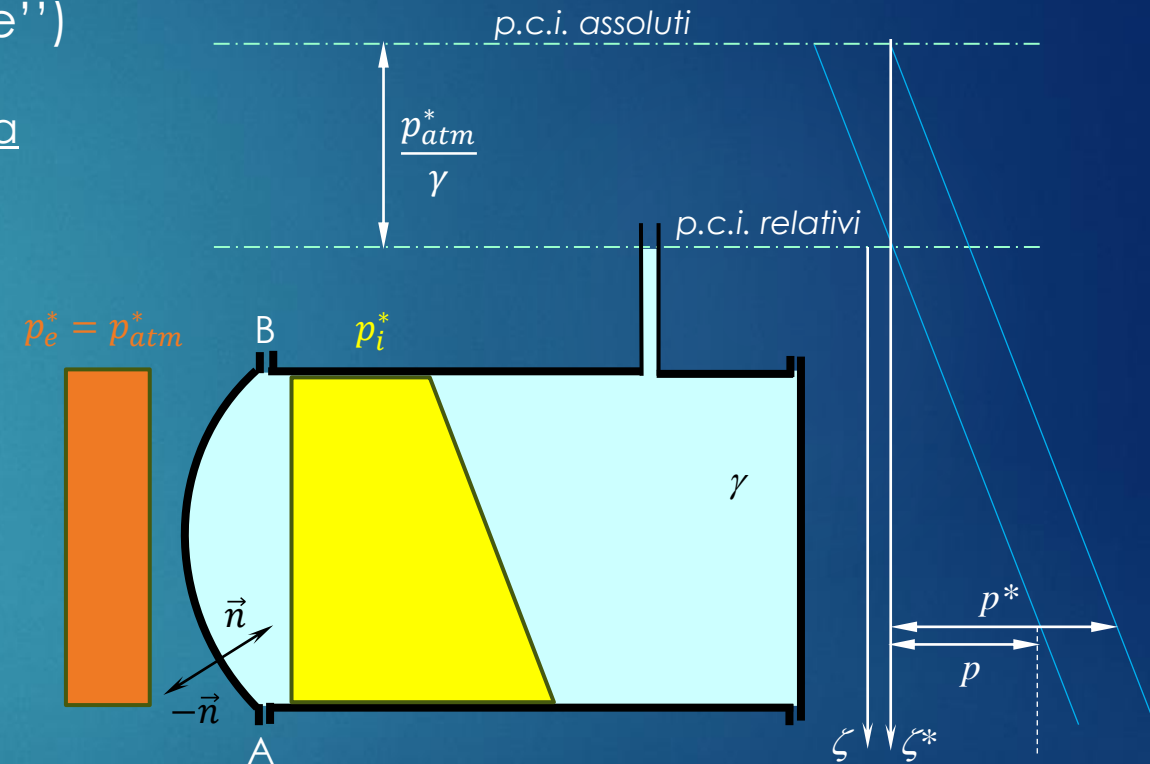


# Spinte idrostatiche – pressioni relative

## ► Calcolo della spinta con pressioni assolute ("vere")

- Obiettivo pratico: calcolo sollecitazione complessiva (p.es. dimensionamento bulloni giunzione flangiata)
- Interno:  $p_i^* = p^*$  liquido; normale  $\vec{n}$
- Esterno:  $p_e^* = p_{atm}^*$  (uniforme); normale  $-\vec{n}$
- ✓ Ipotesi: spessore parete trascurabile

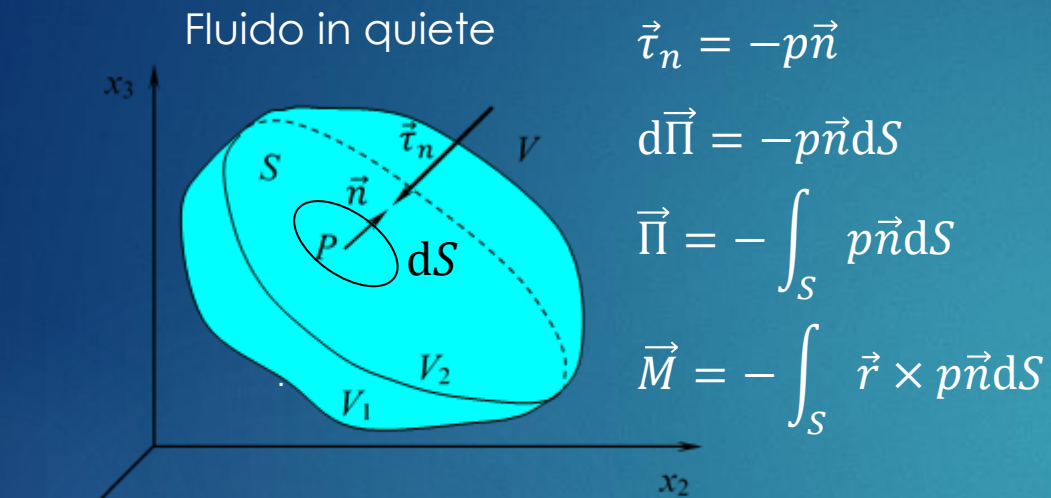
$$\begin{aligned}
 \vec{I} &= \int_S -p_i^* \vec{n} dS + \int_S -p_e^* (-\vec{n}) dS = \\
 &= \int_S -p_i^* \vec{n} dS + \int_S -p_{atm}^* (-\vec{n}) dS = \\
 &= \int_S -(p_i^* - p_{atm}^*) \vec{n} dS = \int_S -p \vec{n} dS
 \end{aligned}$$



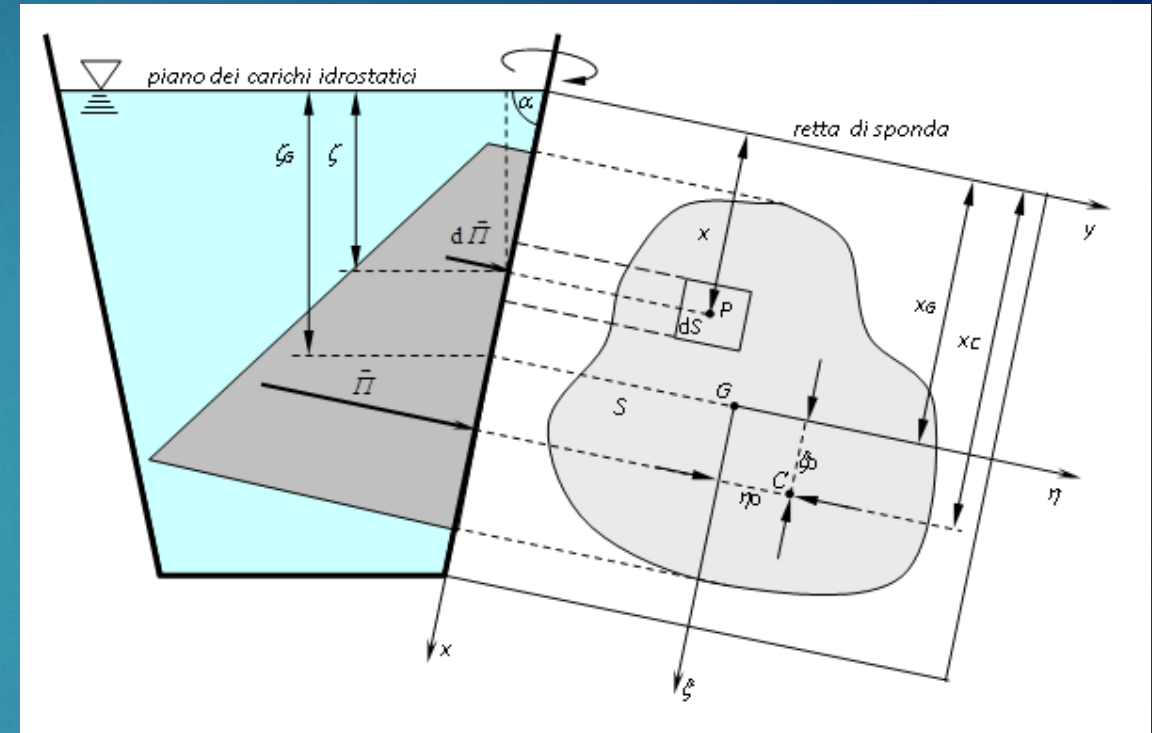
✓ Il calcolo delle spinte con le pressioni relative è:

- corretto
- conveniente

# Spinte idrostatiche (superfici piane)

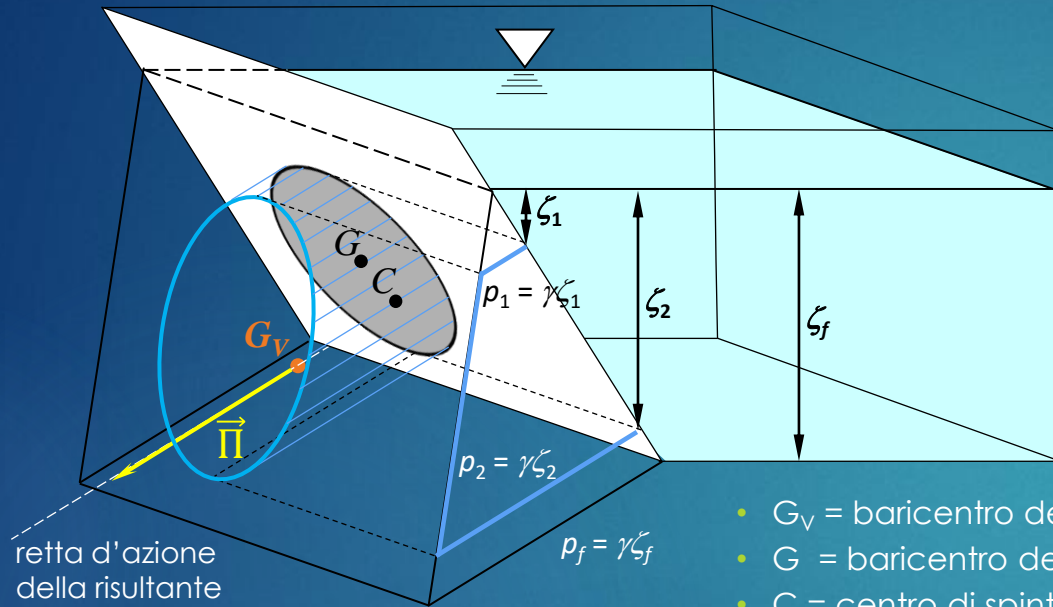


- Superficie piana  $\Rightarrow \vec{n} = \text{cost}$ 
  - ✓ Sistema di  $\infty$  forze parallele  $d\vec{\Pi} = -p\vec{n}dS$
- Determinazione della risultante
  - $\vec{\Pi} = -\int_S p\vec{n}dS = -\vec{n} \int_S pdS$ 
    - ✓  $\int_S pdS$  è il volume del solido di spinta

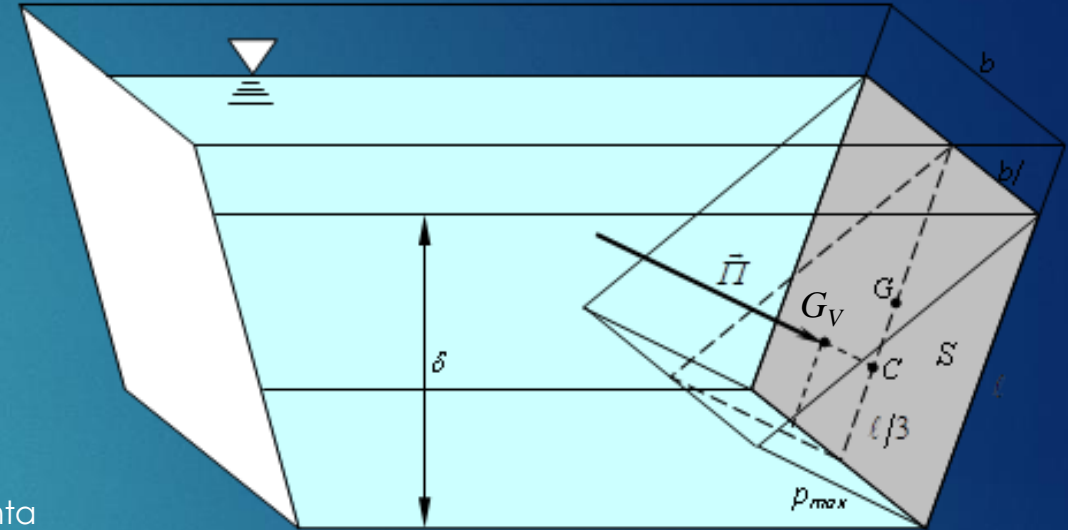


- Solido di spinta
  - Ha per base la superficie premuta S e per altezza, punto per punto, il valore della pressione nel punto
  - Analogia con un volume materiale pesante
  - La risultante è applicata nel baricentro del solido di spinta e può scorrere lungo la propria retta d'azione

# Spinte idrostatiche (superfici piane)



- $G_v$  = baricentro del solido di spinta
- $G$  = baricentro della superficie premuta
- $C$  = centro di spinta (intersezione retta d'azione con superficie premuta)



- Il metodo è applicabile agevolmente soltanto per superfici rettangolari con due lati orizzontali
  - ✓ il solido di spinta è un prisma (*prisma di spinta*), solido di proiezione da diagramma di pressione
  - ✓ Lo stato di sforzo è piano, rappresentabile mediante una sezione retta del prisma di spinta
    - Un solo lato orizzontale sul p.c.i. (es. in figura) ➡ prisma a sezione triangolare
    - Nessuno dei due lati orizzontali sul p.c.i. ➡ prisma a sezione trapezoidale (solo pressione o solo depressione) o bi-triangolare (parte in pressione e parte in depressione)



100

- ✓ Necessario calcolo due volumi e due baricentri

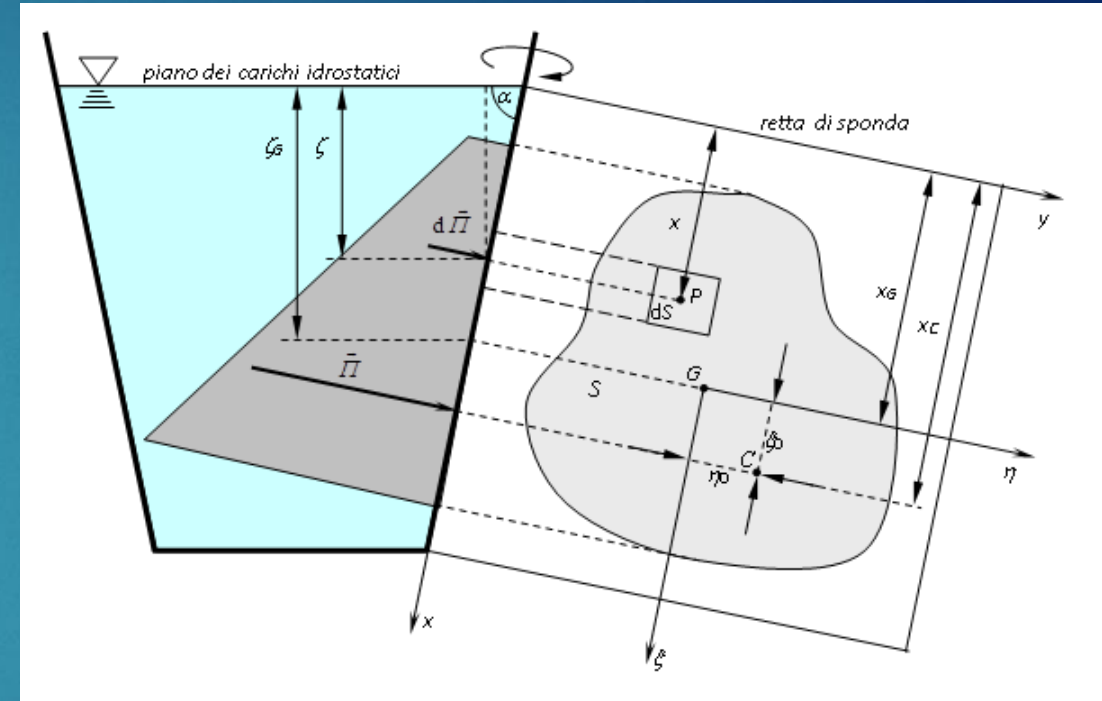
# Spinte idrostatiche (superfici piane)

► Metodo della pressione baricentrica: risultante

- $\vec{\Pi} = - \int_S p \vec{n} dS = - \vec{n} \int_S p dS$  ( $\vec{n} = \text{cost}$ )
- $p = \gamma \zeta$  (da Legge di Stevin: solo per i liquidi !)
- $\int_S p dS = \int_S \gamma \zeta dS = \gamma \int_S \zeta dS$  ( $\gamma = \text{cost}$ )
- $\int_S \zeta dS$  è il *momento statico* della superficie  $S$  rispetto al piano dei carichi idrostatici
- $\int_S p dS = \gamma \int_S \zeta dS = \gamma \zeta_G S = p_G S$

$$\vec{\Pi} = - \vec{n} p_G S$$

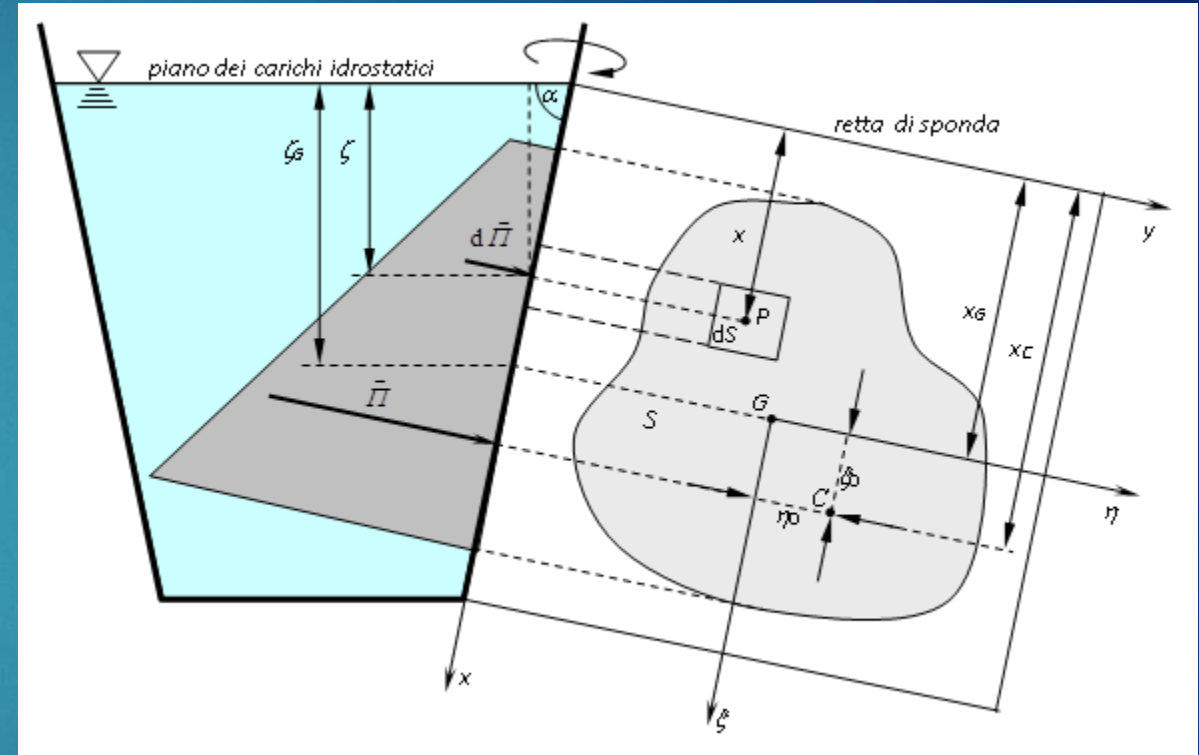
$$\Pi_{-n} = p_G S = \gamma \zeta_G S$$



- Calcolo modulo risultante ricondotto a calcolo della pressione  $p_G$  nel baricentro della superficie piana (pressione media su  $S$ )
  - ✓  $p_G > 0 \Rightarrow$  spinta di compressione
  - ✓  $p_G < 0 \Rightarrow$  spinta di trazione
- Aeriformi:  $p_G = p = \text{cost}$

# Spinte idrostatiche (superfici piane)

- Metodo della pressione baricentrica : punto di applicazione della risultante
  - Il sistema di forze reale è la distribuzione continua di forze elementari  $d\vec{P} = -p\vec{n}dS$
  - Un sistema equivalente (ad esso sostituibile se applicato a un corpo rigido) deve avere uguali risultante e momento risultante
    - $\vec{R} = \vec{P} = -\int_S p\vec{n}dS = -\vec{n}p_G S$
    - $\vec{M} = -\int_S \vec{r} \times p\vec{n}dS$
  - Il risultante costituisce un sistema equivalente (la risultante) se applicato in un punto tale che il suo momento rispetto a un polo prescelto (a piacere) sia uguale al momento risultante del sistema di forze reale (la distribuzione continua delle forze elementari)

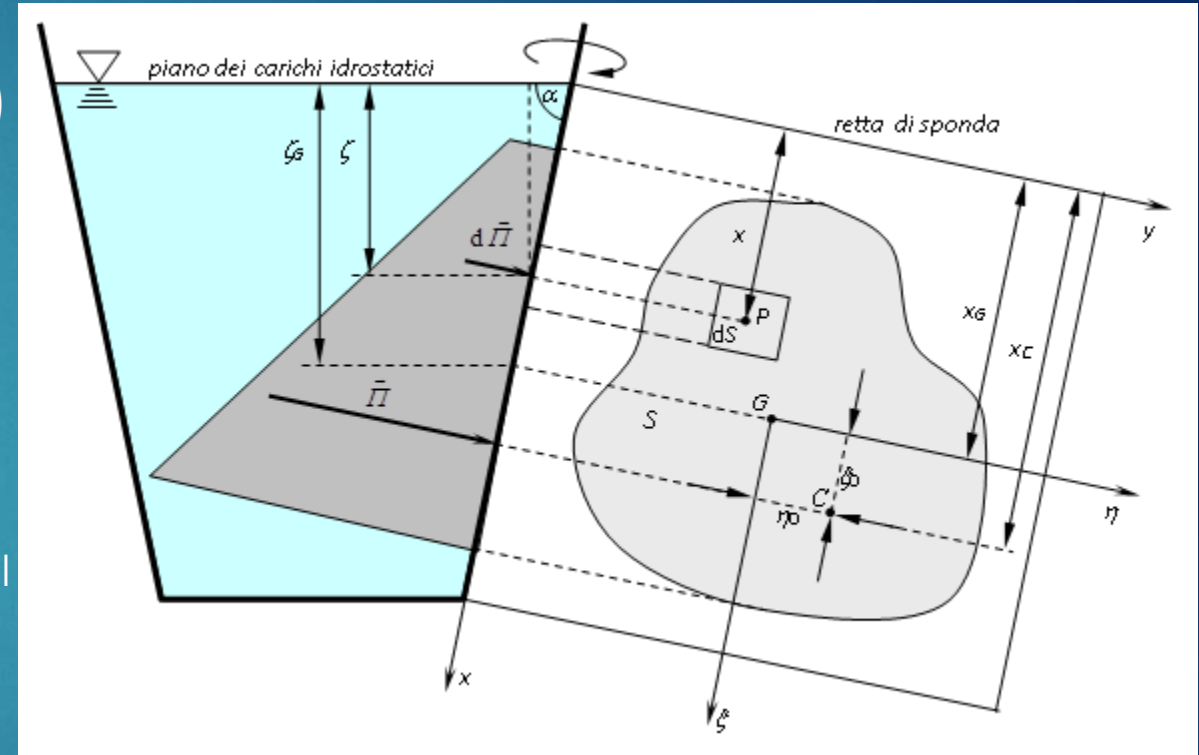


- Cerchiamo il punto di applicazione posto sulla superficie premuta che soddisfi la condizione di equivalenza sui momenti (centro di spinta C)
  - ✓ La risultante potrà scorrere lungo la retta d'azione



# Spinte idrostatiche (superfici piane)

- Metodo della pressione baricentrica : punto di applicazione della risultante (centro di spinta C)
  - Il momento di una forza è un vettore
  - Due vettori sono uguali se hanno identiche componenti scalari sugli assi coordinati
  - Forze ortogonali al piano che contiene la superficie premuta  $S$   $\longrightarrow$  momenti paralleli al piano (da proprietà prodotto vettoriale)
  - È conveniente assumere un sistema di riferimento sul piano che contiene la superficie, avente assi così definiti:
    - Asse  $y$ : retta intersezione del p.c.i. con il piano che contiene la superficie premuta  $S$  (*retta di sponda*)
    - Asse  $x$ : una qualunque retta di massima pendenza (quindi ortogonale a  $y$ )



- Scegliamo come polo l'origine degli assi coordinati
- Componenti sugli assi del vettore momento = momenti della forza *rispetto agli assi*



# Spinte idrostatiche (superfici piane)

- Metodo della pressione baricentrica : punto di applicazione della risultante (centro di spinta C)

- Momento forza elementare rispetto ad asse y (r.d.s.):

$$dM_x = x d\Pi_n = x p dS$$

- Momento risultante del sistema di forze reale:

$$M_{rx} = \int_S x p dS = \int_S x \gamma \zeta dS = \gamma \int_S x \zeta dS$$

$$\zeta = x \sin \alpha \quad \alpha = \text{angolo fra piano } S \text{ e p.c.i.} = \text{cost}$$

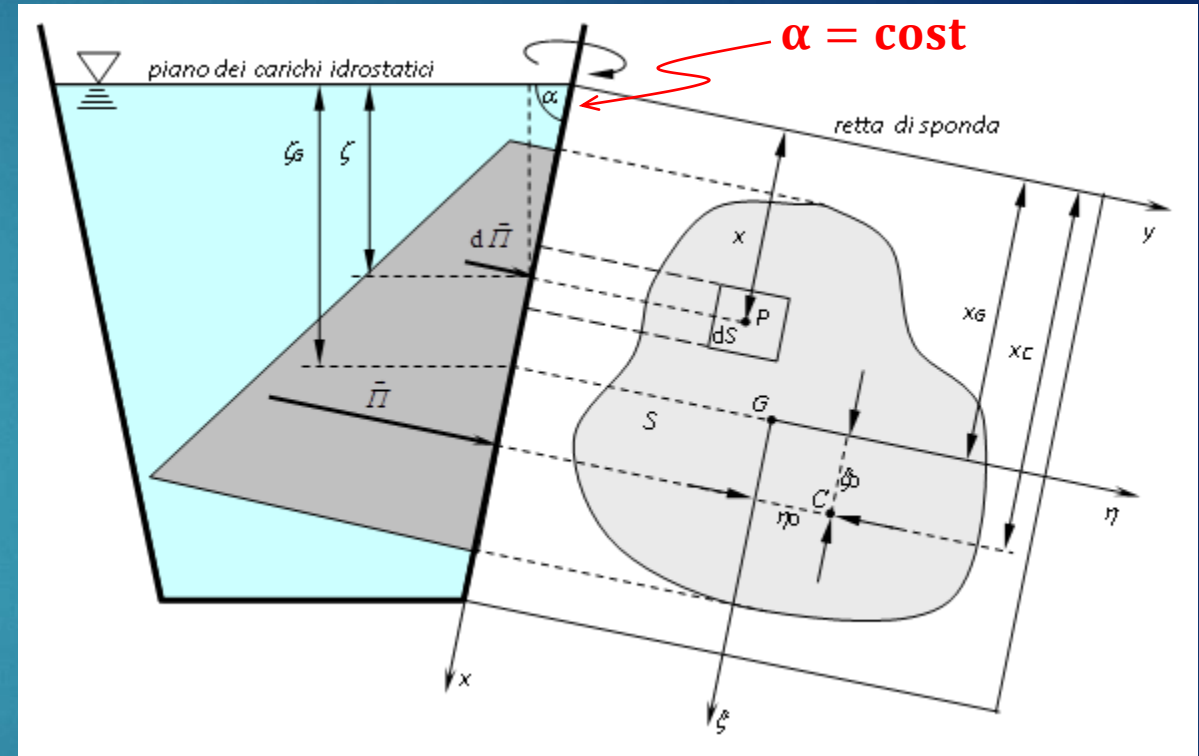
$$M_{rx} = \gamma \int_S x \zeta dS = \gamma \sin \alpha \int_S x^2 dS = \gamma \sin \alpha I_{xx}$$

- ✓  $I_{xx}$  = momento di inerzia della superficie S rispetto alla retta di sponda

- Momento della risultante rispetto ad asse y (r.d.s.):

$$M_{\Pi x} = x_c \Pi_n = x_c p_G S = x_c \gamma \zeta_G S = x_c \gamma x_G \sin \alpha S$$

- ✓  $x_G$  = coordinata x del baricentro  $\Rightarrow x_G S = M_S$



$$\text{► } M_{rx} = M_{\Pi x} \Leftrightarrow \gamma \sin \alpha I_{xx} = x_c \gamma x_G \sin \alpha S$$

$$x_c = \frac{\gamma \sin \alpha I_{xx}}{\gamma \sin \alpha x_G S} = \frac{I_{xx}}{x_G S} = \frac{I_{xx}}{M_S}$$

$$x_c = \frac{I_{xx}}{M_S}$$

# Spinte idrostatiche (superfici piane)

- Metodo della pressione baricentrica : punto di applicazione della risultante (centro di spinta C)

- Momento forza elementare rispetto ad asse x (r.m.p.):

$$dM_y = y d\Pi_n = y p dS$$

- Momento risultante del sistema di forze reale:

$$M_{ry} = \int_S y p dS = \int_S y \gamma \zeta dS = \gamma \int_S y \zeta dS$$

$$\zeta = x \sin \alpha \quad \alpha = \text{angolo fra piano } S \text{ e p.c.i.} = \text{cost}$$

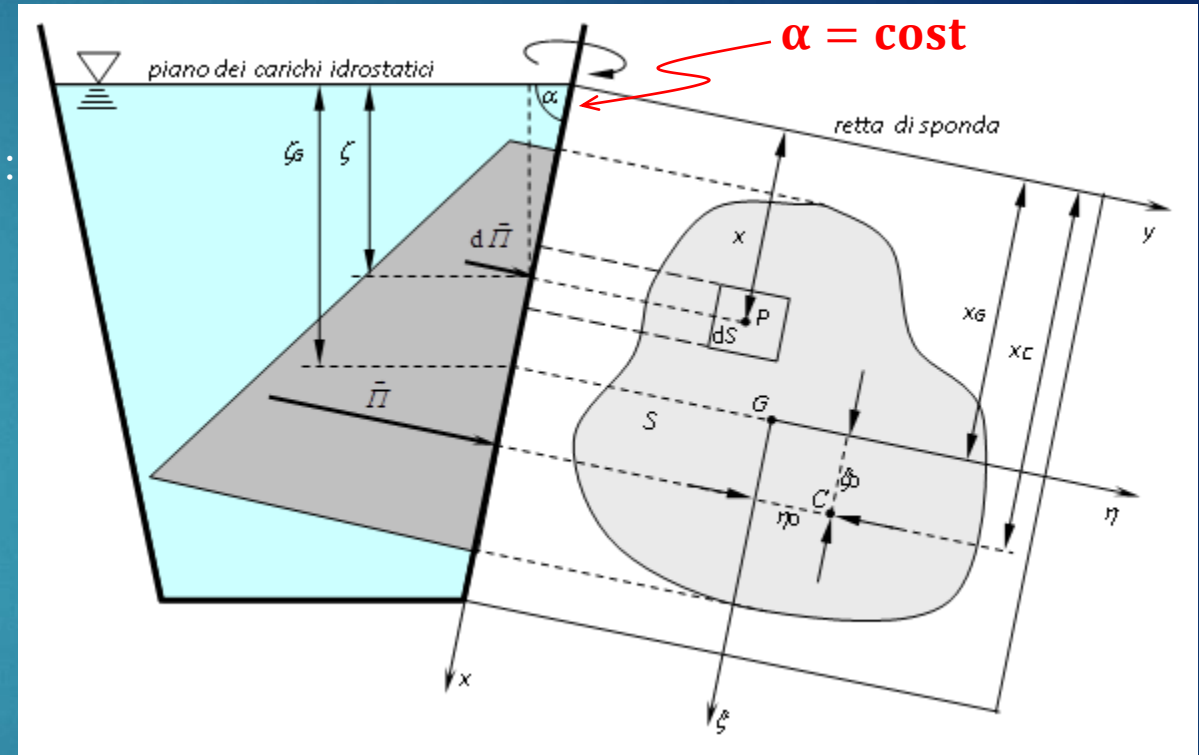
$$M_{ry} = \gamma \int_S y \zeta dS = \gamma \sin \alpha \int_S x y dS = \gamma \sin \alpha I_{xy}$$

- ✓  $I_{xy}$  = momento centrifugo della superficie  $S$  rispetto agli assi  $x$  (r.m.p.) e  $y$  (retta di sponda)

- Momento della risultante rispetto ad asse  $x$  (r.m.p.):

$$M_{\Pi y} = y_c \Pi_n = y_c p_G S = y_c \gamma \zeta_G S = y_c \gamma x_G \sin \alpha S$$

- ✓  $x_G$  = coordinata  $x$  del baricentro  $\Rightarrow x_G S = M_S$



$$M_{ry} = M_{\Pi y} \Leftrightarrow \gamma \sin \alpha I_{xy} = y_c \gamma x_G \sin \alpha S$$

$$y_c = \frac{\gamma \sin \alpha I_{xy}}{\gamma \sin \alpha x_G S} = \frac{I_{xy}}{x_G S} = \frac{I_{xy}}{M_S}$$

$$y_c = \frac{I_{xy}}{M_S}$$

# Spinte idrostatiche (superfici piane)

- Metodo  $p_G$ : espressione coordinate centro di spinta in riferimento con origine in baricentro di  $S$

- Teoremi di trasposizione di Huygens:

$$I_{xx} = I_{xx_0} + x_G^2 S \quad ; \quad I_{xy} = I_{xy_0} + x_G y_G S$$

- $I_{xx_0} = I_{\xi\xi}$  momento d'inerzia rispetto ad asse baricentrico  $\eta$ , // ad asse  $y$  utilizzato per calcolo  $I_{xx}$
- $I_{xy_0} = I_{\xi\eta}$  momento centrifugo rispetto ad assi baricentrici  $\xi, \eta$ , // ad assi  $x, y$  utilizzati per calcolo  $I_{xy}$

- Coordinate c. di spinta in riferimento baricentrico:

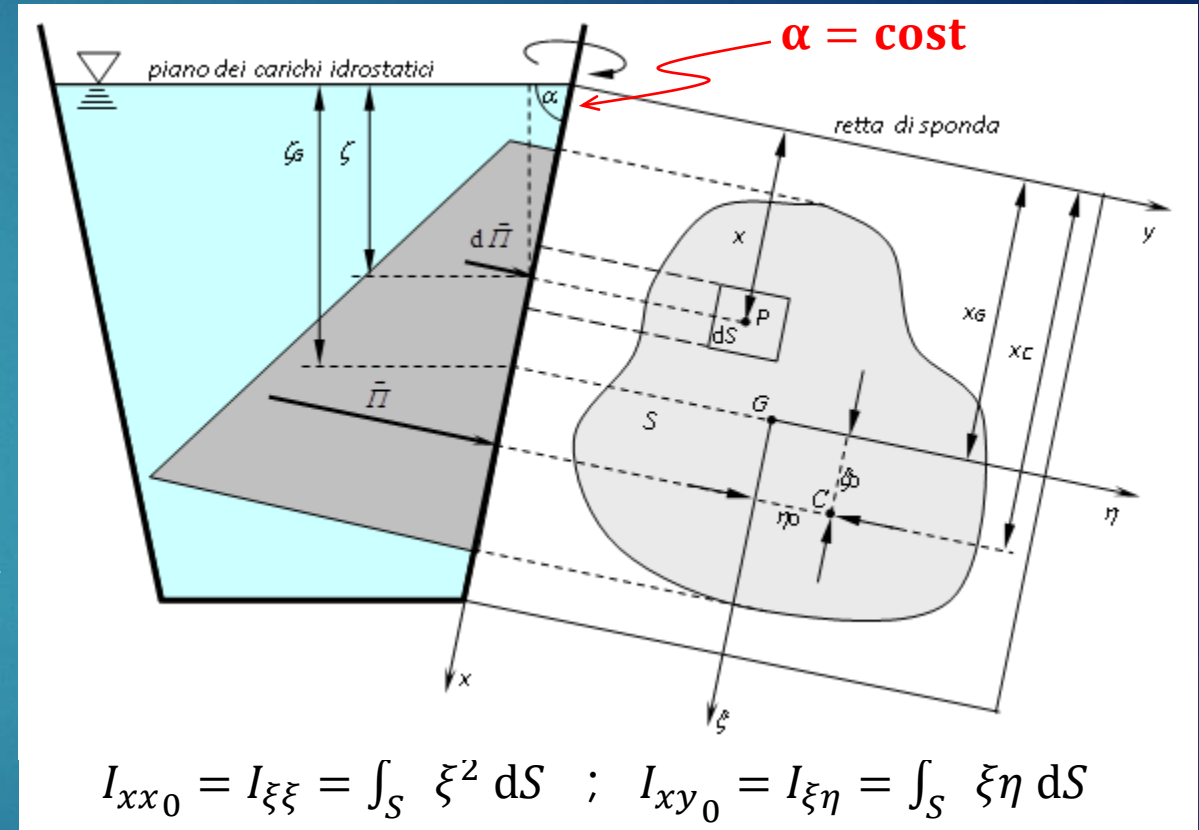
$$x_c = \frac{I_{xx}}{M_s} = \frac{I_{xx_0} + x_G^2 S}{x_G S} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} + x_G = \frac{I_{xx_0}}{M_s} + x_G = \xi_0 + x_G$$

$$y_c = \frac{I_{xy}}{M_s} = \frac{I_{xy_0} + x_G y_G S}{x_G S} = \frac{I_{xy_0}}{x_G S} + y_G = \frac{I_{xy_0}}{M_s} + y_G = \eta_0 + y_G$$

- Coordinate c. di spinta in riferimento con origine nel baricentro →

$$\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_s}$$

$$\eta_0 = \frac{I_{xy_0}}{M_s}$$





# Spinte idrostatiche (superfici piane)

## ► Metodo $p_G$ : osservazioni e casi particolari

- $\xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_S} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} \longrightarrow \xi_0$  ha lo stesso segno di  $x_G$ 
  - ✓ Centro di spinta sempre da parte opposta della retta di sponda rispetto al baricentro di  $S$
- Pressioni costanti (liquido su piano orizzontale o gas)

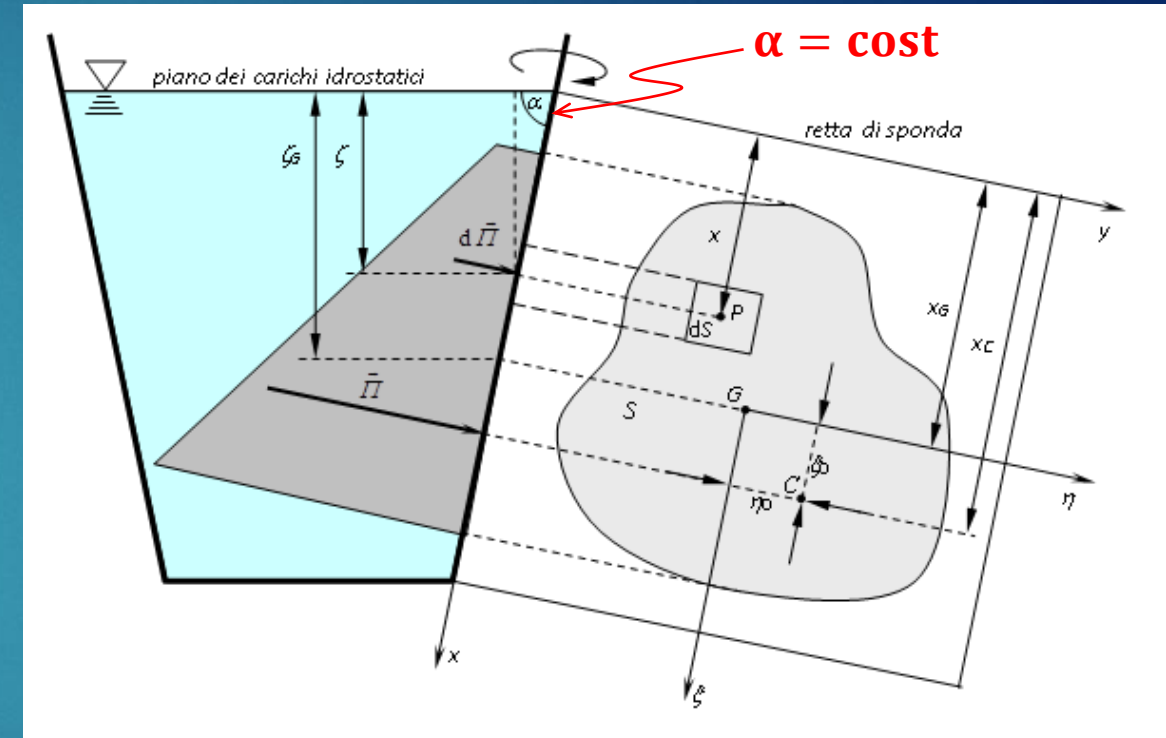
$$x_c = \frac{\int_S x p dS}{\int_S p dS} = \frac{p \int_S x dS}{p \int_S dS} = \frac{\int_S x dS}{\int_S dS} = x_G$$

$$y_c = \frac{\int_S y p dS}{\int_S p dS} = \frac{p \int_S y dS}{p \int_S dS} = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} = y_G$$

- ✓ Il centro di spinta coincide con il baricentro
- ✓ Verifica con formula generale per un liquido:

$$\text{piano orizzontale} \Rightarrow x_G \rightarrow \infty \Rightarrow \xi_0 = \frac{I_{xx_0}}{M_S} = \frac{I_{xx_0}}{x_G S} = 0$$

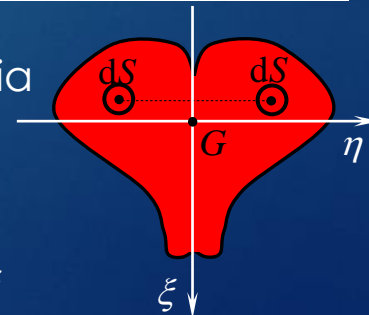
$$\eta_0 = \frac{I_{xy_0}}{M_S} = \frac{I_{xy_0}}{x_G S} = 0$$



- Figura piana con un asse di simmetria

$$I_{xy_0} = \int_S \xi \eta dS = 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$$

- ✓ Il centro di spinta giace sull'asse  $\xi$







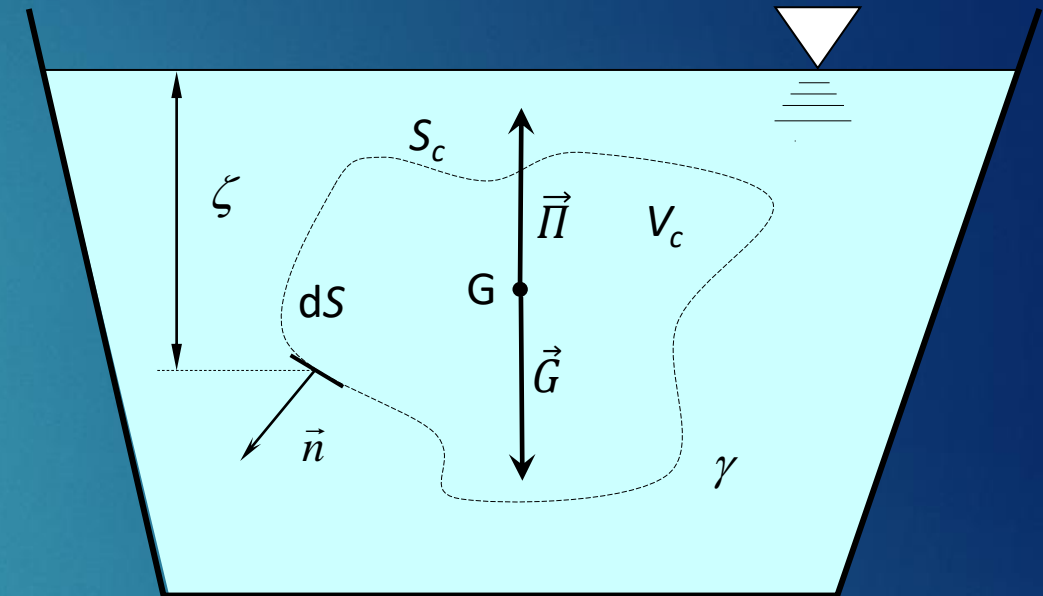
# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Equazione globale dell'Idrostatica

- Fluido nel volume di controllo in equilibrio
- 1<sup>a</sup> Equazione Cardinale della Statica ( $\vec{R}_e = 0$ )

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0$$

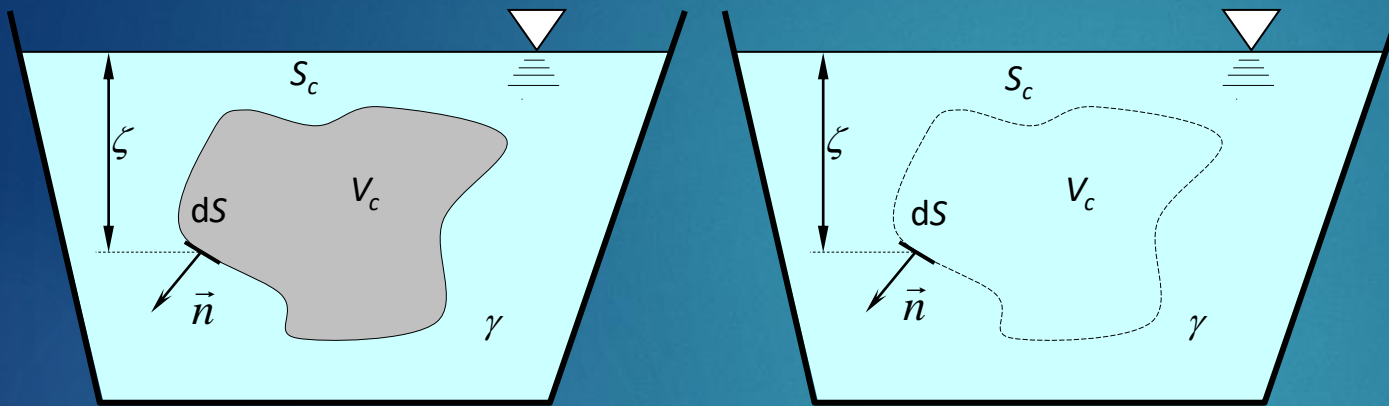
- Forze di massa:  $\vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV = \int_{V_c} -\rho g \nabla z dV$
- Forze di superficie:  $\vec{\Pi} = - \int_{S_c} p \vec{n} dS$
- ✓  $\vec{\Pi} = -\vec{G}$  forze di massa (peso) e forze di superficie (spinta sulla superficie di contorno  $S_c$ ) uguali e contrarie



- 2<sup>a</sup> Eq.ne Cardinale della Statica ( $\vec{M}_e = 0$ )
- ✓  $\vec{\Pi}, \vec{G}$  agenti sulla medesima retta d'azione
- ✓  $\vec{\Pi}, \vec{G}$  applicate nel baricentro del volume liquido (centro di figura del v. di controllo)

# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## Principio di Archimede



### ► Parte della superficie di contorno $S_c$ a contatto con una parete

- Suddivisione della superficie di contorno in  $N+1$  parti  $\longrightarrow \vec{P} = \sum_{i=0}^N \vec{P}_i$

$$\vec{G} + \vec{P}_0 + \vec{P}_1 + \dots + \vec{P}_N = 0$$

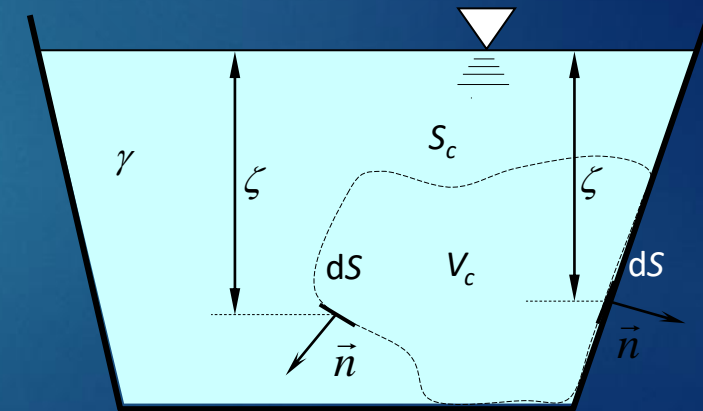
- $\vec{P}_0$  spinta che la parete esercita sul fluido
- Spinta sulla parete  $\vec{S} = -\vec{P}_0$  (principio di azione e reazione)

### ► Corpo immerso di uguale forma

- Spinta di galleggiamento sul corpo

$$\vec{P} = - \int_S p \vec{n} dS = -\vec{G}$$

- $\vec{G}$  peso del volume di fluido spostato
- $\vec{P}$  applicata in baricentro volume liquido



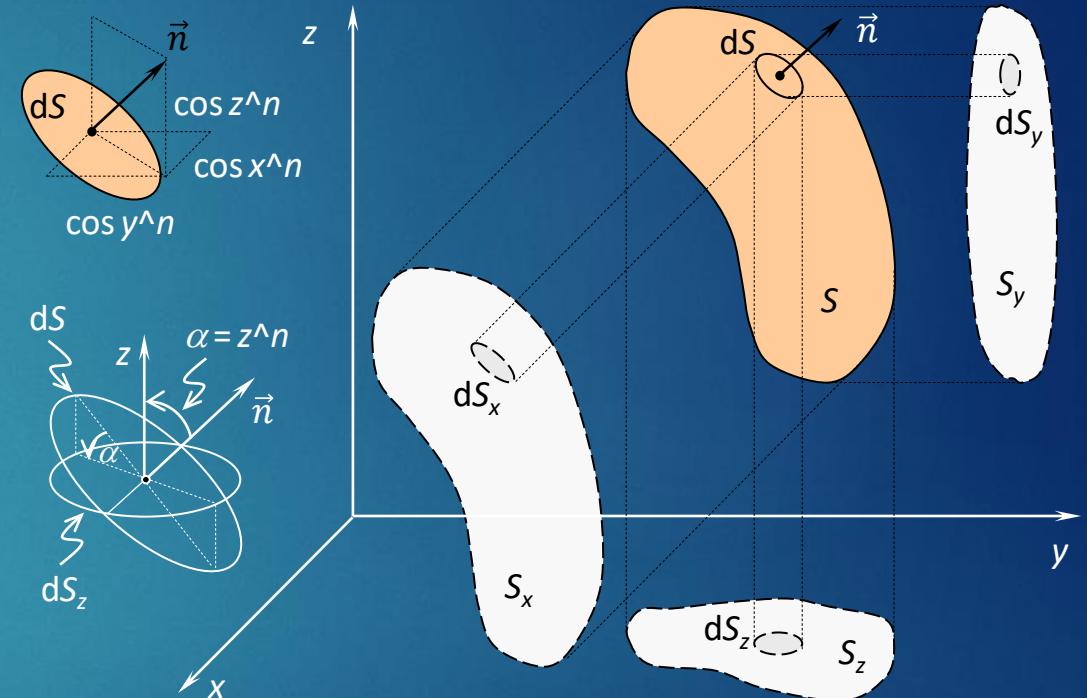
$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{P}_1 + \dots + \vec{P}_N$$

# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Calcolo della spinta per componenti

- $\vec{\Pi} = - \int_S p \vec{n} dS$
- $\vec{n} = \cos x^n \vec{i} + \cos y^n \vec{j} + \cos z^n \vec{k}$
- $\vec{\Pi} = - \int_S p (\cos x^n \vec{i} + \cos y^n \vec{j} + \cos z^n \vec{k}) dS$   
 $= - \vec{i} \int_S p \cos x^n dS - \vec{j} \int_S p \cos y^n dS$   
 $- \vec{k} \int_S p \cos z^n dS$

- ✓  $\vec{\Pi}_x = - \vec{i} \int_S p \cos x^n dS$  componente vettoriale di  $\vec{\Pi}$  sull'asse x ( $-\int_S p \cos x^n dS$  compon. scalare)
- ✓  $\vec{\Pi}_y = - \vec{j} \int_S p \cos y^n dS$  componente vettoriale di  $\vec{\Pi}$  sull'asse y ( $-\int_S p \cos y^n dS$  compon. scalare)
- ✓  $\vec{\Pi}_z = - \vec{k} \int_S p \cos z^n dS$  componente vettoriale di  $\vec{\Pi}$  sull'asse z ( $-\int_S p \cos z^n dS$  compon. scalare)





# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Calcolo della spinta per componenti

- Angolo fra piani = angolo fra normali ai piani

✓  $dS_x = dS \cos x^n$  proiezione di  $dS$  sul piano  $yz$  (\*)

✓  $dS_y = dS \cos y^n$  proiezione di  $dS$  sul piano  $xz$  (\*)

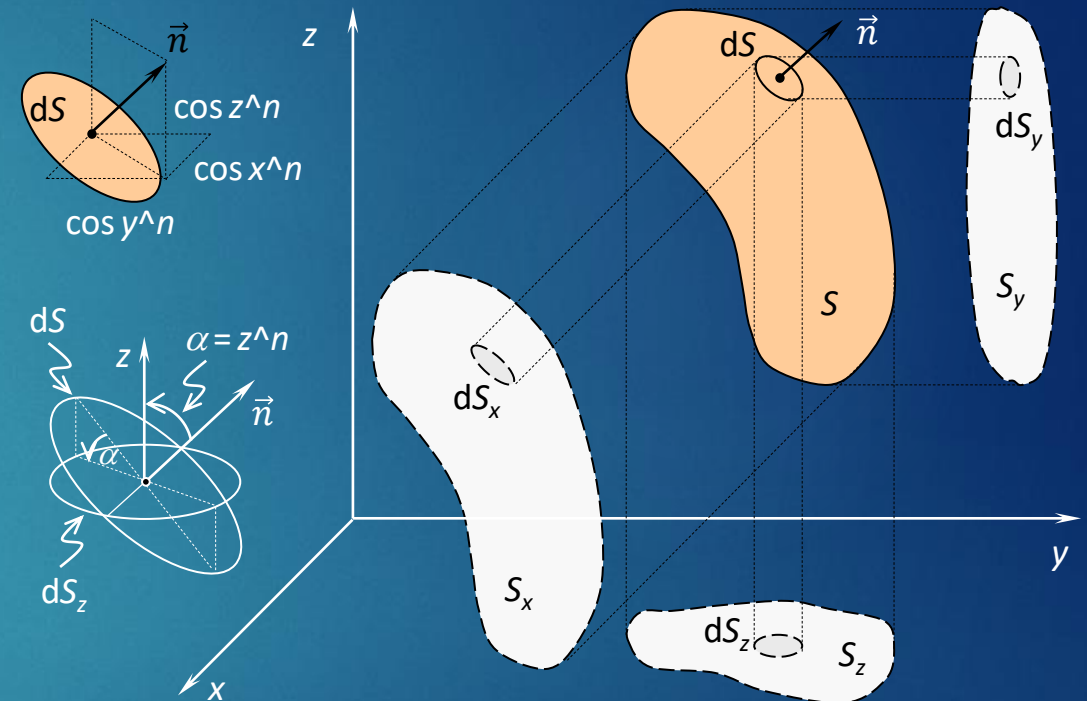
✓  $dS_z = dS \cos z^n$  proiezione di  $dS$  sul piano  $xy$  (\*)

✓ (\*) a meno del segno:  $\cos \alpha \lesseqgtr 0$

$$\vec{P} = -\vec{i} \int_S p \cos x^n dS - \vec{j} \int_S p \cos y^n dS - \vec{k} \int_S p \cos z^n dS$$

$$= -\vec{i} \int_S p dS_x - \vec{j} \int_S p dS_y - \vec{k} \int_S p dS_z$$

$$= -\vec{i} \int_{S_x} p dS_x - \vec{j} \int_{S_y} p dS_y - \vec{k} \int_{S_z} p dS_z$$



- ✓ Componenti orizzontali: spinte su superfici  $S_x$  e  $S_y$ , proiezioni della  $S$  nelle direzioni  $x$  e  $y$  (la pressione nel punto proiettato = pressione nel punto di  $S$ )
- ✓ Calcolo componenti orizzontali in tutto e per tutto come spinte su superfici piane (risultante e c.d.s.)

# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Calcolo spinta per componenti (componente verticale)

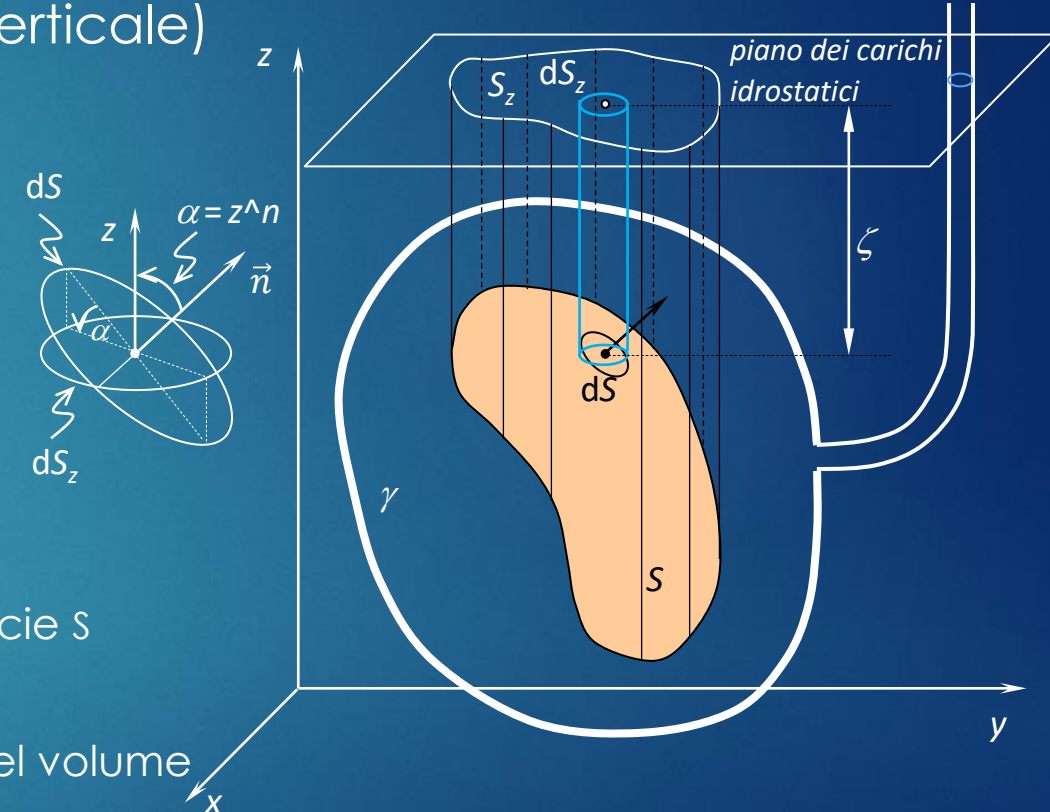
- Liquido (Legge di Stevin  $\longrightarrow p = \gamma \zeta$ )

$$\vec{N}_z = -\vec{k} \int_S p \, dS_z = -\vec{k} \int_S \gamma \zeta \, dS_z = -\vec{k} \gamma \int_S \zeta \, dS_z$$

- ✓  $\zeta \, dS_z$  volume cilindrico di base  $dS_z$  e altezza  $\zeta$
- ✓  $\int_S \zeta \, dS_z$  volume di proiezione compreso fra la superficie  $S$  e il p.c.i. del liquido
- ✓  $\gamma \int_S \zeta \, dS_z$  peso del volume compreso fra la superficie  $S$  e il p.c.i., immaginato riempito di liquido
- ✓ Componente verticale  $\vec{N}_z$  applicato nel baricentro del volume

- Aeriforme

$$p = \text{cost} \longrightarrow \vec{N}_z = -\vec{k} \int_S p \, dS_z = -\vec{k} p \int_S dS_z = -\vec{k} p S_z \longrightarrow \text{spinta sulla superficie piana proiettata}$$



# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

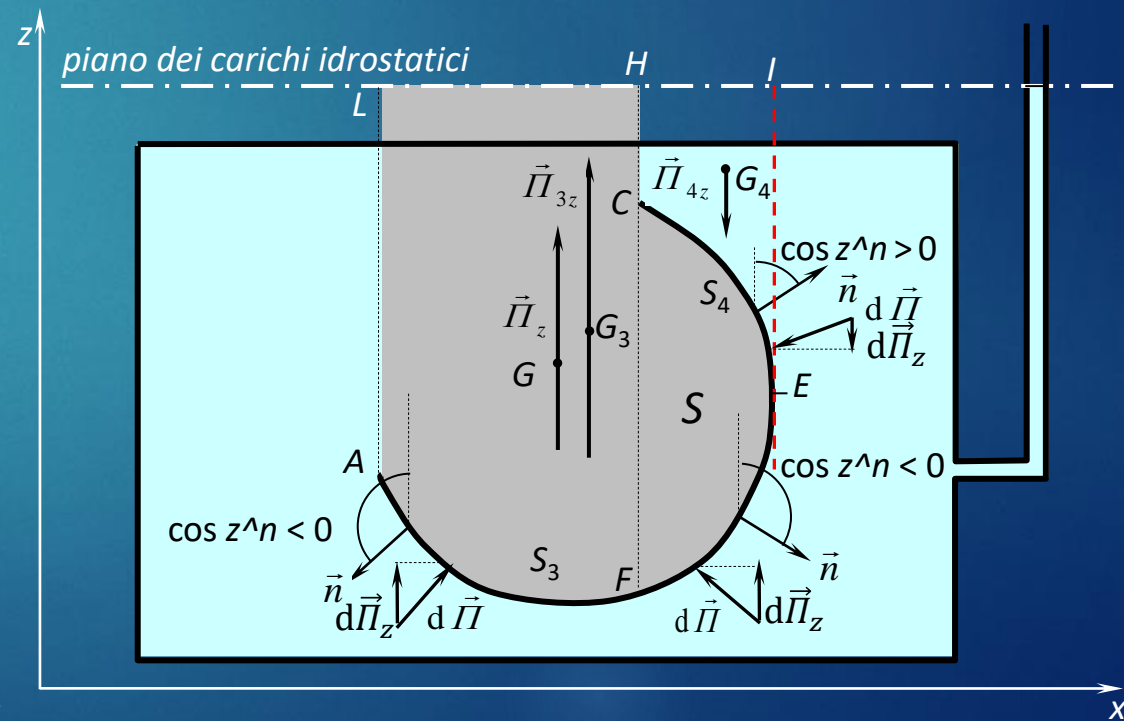
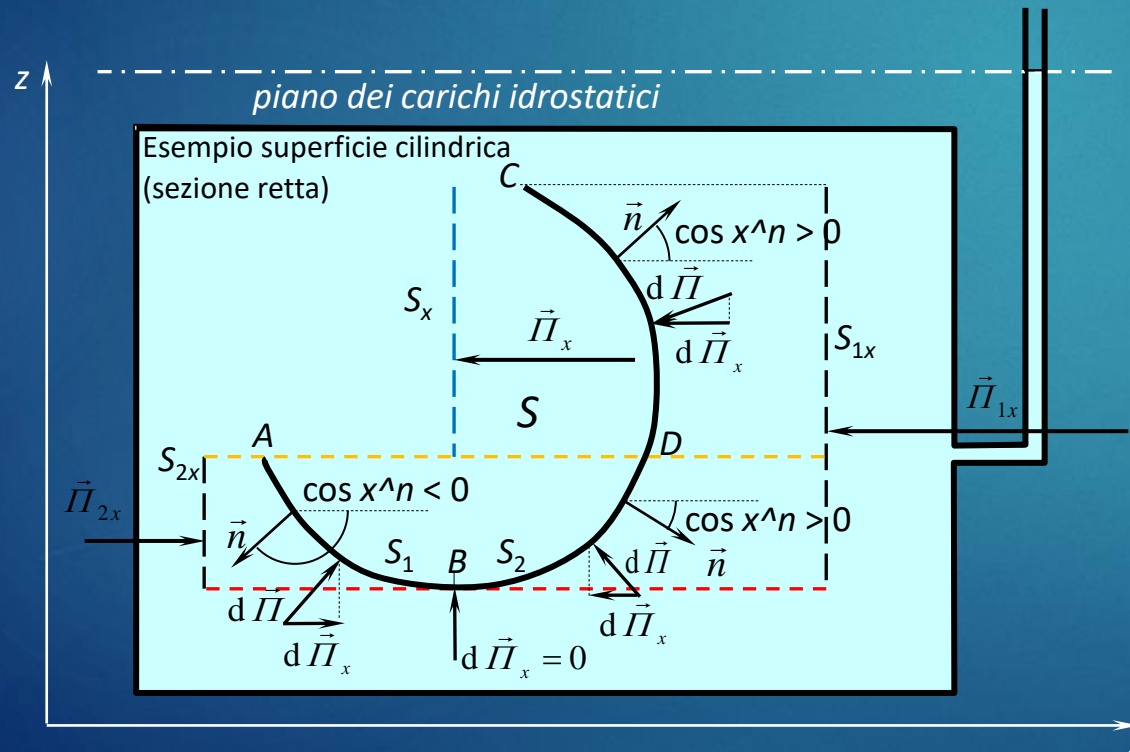
## ► Verso dei componenti della spinta

$$\vec{\Pi}_x = -\vec{i} \int_S p \, dS_x = -\vec{i} \int_S p \cos x^\wedge n \, dS$$

$$\vec{\Pi}_y = -\vec{j} \int_S p \, dS_y = -\vec{j} \int_S p \cos y^\wedge n \, dS$$

$$\vec{\Pi}_z = -\vec{k} \int_S p \, dS_z = -\vec{k} \int_S p \cos z^\wedge n \, dS$$

- Verso componente locale legato a segno coseno direttore
- Possibili versi opposti di componenti agenti su parti di S
- Discrimine fra parti di S luogo di punti a tangente  $\parallel$  a comp.
- Possibilità di semplificazioni (elisione forze uguali e contrarie)
- Regola pratica: analisi versi componenti spinte elementari

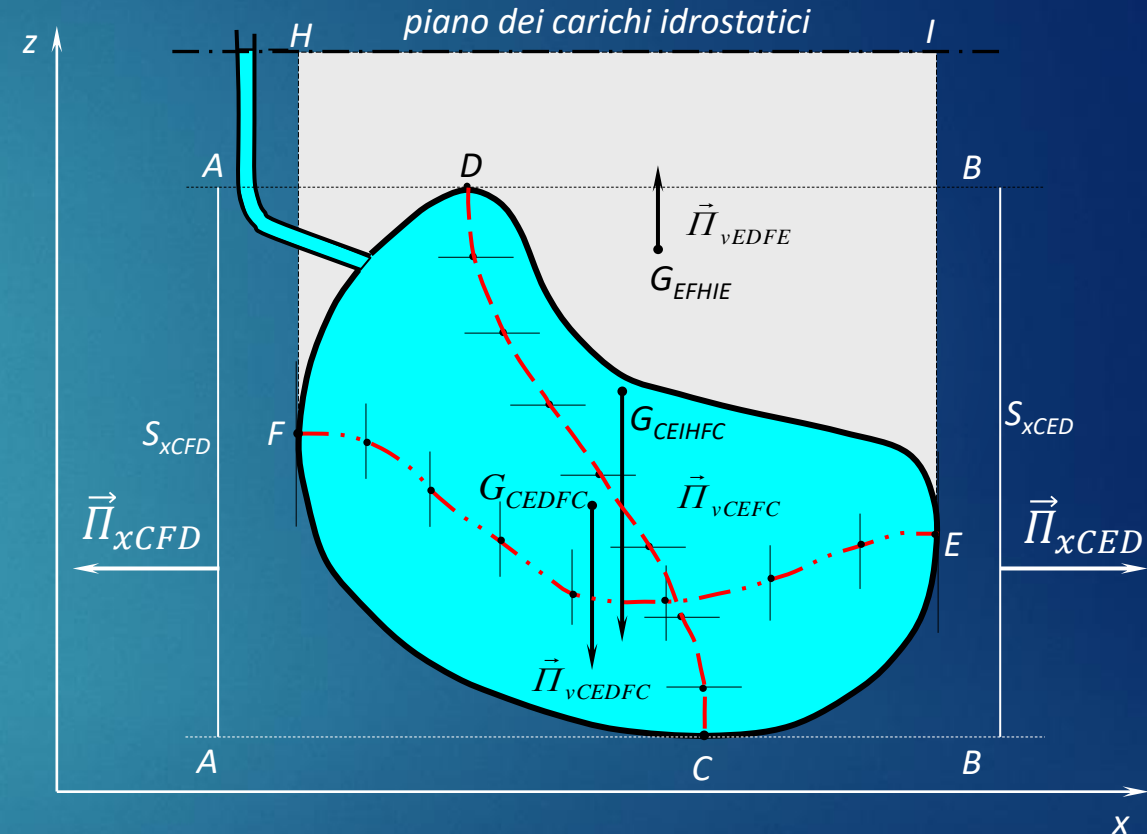






# Spinte idrostatiche (superfici chiuse)

- Spinta su sup. interna serbatoio (m. per compon.)
  - Componenti orizzontali (per x e y: esempio per x)
    - Divisione superficie chiusa attraverso luogo punti a tangente parallela ad asse x (curva rossa CD)
    - Le proiezioni lungo x delle due parti sono identiche
    - I versi dei componenti sono opposti  $\Rightarrow \vec{\Pi}_x = 0$
    - Analogamente si ha  $\vec{\Pi}_y = 0 \Rightarrow \vec{\Pi}_o = \vec{\Pi}_x + \vec{\Pi}_y = 0$
  - Componente verticale
    - Divisione superficie attraverso luogo punti a tangente verticale (curva rossa EF)
    - La superficie inferiore CEFC subisce una spinta verso il basso pari al peso del volume liquido CEIHFC
    - La superficie superiore DEFD subisce una spinta verso l'alto pari in modulo al peso del volume liquido EIHFE
    - La somma algebrica dei due pesi è pari al peso del volume liquido spostato CEDFC, rivolto verso il basso



- ✓ Nel caso di superficie chiusa immersa in un liquido (corpo immerso), si ritrova il principio di Archimede, già dedotto dall'equazione globale dell'Idrostatica (Spinta di galleggiamento, sulla superficie esterna dell'involucro del serbatoio)



# Spinte idrostatiche (corpi immersi)

## ► Stabilità dell'equilibrio di corpi immersi

- G baricentro del corpo (punto di applicazione peso  $\vec{P}$ )
- C baricentro del volume liquido (centro di carena, punto di applicazione spinta di galleggiamento  $\vec{\Pi}$ )
- Equilibrio:  $\vec{P} + \vec{\Pi} = 0$  ; C e G allineati sulla verticale

- $z_G < z_C$  → coppia contraria a rotazione → equilibrio stabile
- $z_G > z_C$  → coppia equiversa a rotazione → equilibrio instabile
- ( $z_G = z_C$  → spinta e peso proprio sempre sulla stessa retta d'azione → equilibrio indifferente)

